Prof. Dr. Alfred Toth

Die Semiosen von Arithmetik und Algebra

1. Wir beginnen erneut mit dem nun hinlänglich bekannten Sachverhalt, dass man in der klassischen Arithmetik nur mit Gleichem operieren kann. Z.B. ergibt die Addition

1 Apfel + 2 Äpfel = 3 Äpfel,

hat also eine Lösung, während die Addition

1 Apfel + 1 Apfelsine = ?

keine Lösung hat. Die Ausflucht „2 Früchte" gibt nun genau an, worum es auch hier wiederum geht: Operiert man in der klassischen Arithmetik mit Verschiedenem, so findet eine Qualitätsabstraktion statt. Genauer allerdings muss man einräumen, dass die Qualitätsabstraktion nur ARTSPEZIFISCH ist. denn im letzten Beispiel sind eben sowohl ein Apfel als auch eine Apfelsine Früchte, während die Qualitätsabstraktion bereits im GATTUNGSSPEZIFISCHEN Fall, z.B. bei

1 Apfel + 1 Tomate = ??

nicht mehr funktioniert; das Resultat „2 Früchte" ist hier ebenfalls falsch. Und selbstverständlich gilt die Qualitätsabstraktion gar nicht im FAMILIENSPEZIFISCHEN Fall, z.B. bei dem an Günther angelehnten Beispiel

1 Krokodil + 1 Zahnweh = ???

Wir halten also fest: In der klassischen Arithmetik kann nur mit Gleichem operiert werden. Bei Verschiedenem kann mit familien- und gattungsspezifischen Differentia gar nicht, bei artspezifischen Differentia nur mittels Qualitätsabstraktion gerechnet werden.

2. Zahlen sind nun Zeichen (vgl. Toth 2011a, b), und zwar solche, die Objekten unter vollständiger Abstraktion von deren Qualitäten zugeordnet werden: 5 Äpfel, 5 Kartoffeln, 5 Schneehühner, 5 Kirchtürme, 5 Fieberanfälle. Wie bereits gezeigt, basiert die Arithmetik ferner darauf, dass diese Objekte somit nur

quantitativ den Referenzbereich der Zahlen ausmachen, d.h. als Grössen. Vollzieht man nun noch den letzten Schritt und abstrahiert auch von der Quantität, so dass man also „irgend Etwas“ den ursprünglichen Objekten zuordnet (z.B. "x“ für 1, 2, 3, ..., 999, 10^{72}, usw.), so sind wir in der Algebra, d.h. nicht mehr in der „Zahlrechnung“, sondern in der „Buchstabenrechnung“ angekommen. Wir können diesen doppelten Abstraktionprozess wie folgt skizzieren:

$$x \to \begin{cases} 1 \to \bigstar \; / \; \bullet \; / \; + \; / \; \ldots \\ 2 \to \bigstar\bigstar \; / \; \bullet\bullet \; / \; ++ \; / \; \ldots \\ 3 \to \bigstar\bigstar\bigstar \; / \; \bullet\bullet\bullet \; / \; +++ \; / \; \ldots \end{cases}$$

$$\underbrace{\mathrm{ZR2} \to }_{\text{Quantitätsabstraktion}}\!\!\underbrace{\mathrm{ZR1} \to \mathrm{OBJ}}_{\text{Qualitätsabstraktion}}$$

Dabei ist:

ZR1 = Zahl, ZR2 = Variable = Zeichen (arbiträr, vgl. den Anfang von Hilberts „Geometrie“) für Zahl.

Somit gilt

ZR2 = Zeichen(Zahl) = ZR2(ZR1).

ZR1 → OBJ: Qualitätsabstraktion

ZR2 → ZR1: Quantitätsabstraktion

ZR1 → OBJ = OBJ – QUAL = (ZR2 → ZR1) = $(3.a\ 2.b\ 1.c)_1 \to (3.a\ 2.b\ 1.c)_2$.

3. Was bleibt also von einem Objekt, nachdem ihm sowohl seine Quantität als auch seine Qualität weggenommen sind? Das Wegnehmen von Etwas geschieht scheinbar paradoxerweise durch das Zuordnen, d.h. Hinzufügen von anderem Etwas, nämlich von solchem, das das ursprüngliche Etwas ohne das ihm Weggenommene substituiert. Das ist aber nichts anderes als die Definition der Semiose, denn Zeichen treten stets in Klassen auf, die nur durch

für die Definition dieser Klassen relevante Merkmale der ursprünglichen Objekte beibehalten (z.B. die Klasse der Verkehrszeichen, in die alle Farben und Formen, mit und ohne Text, eingehen). Auf jeden Fall geht also bei der Zuordnung einer Zeichenklassen zu einem Objekt Qualität verloren. Es geht allerdings, wie in Toth (2011c) gezeigt, auch Quantität verloren, denn 10 Stopzeichen haben genau die gleiche Bedeutung wie eines, und ob ich 10 oder 30 Sekunden lang winke, bedeutet auch im wesentlichen dasselbe.

Daraus folgt also, dass bereits die Abbildung ZR1 → OBJ eine Semiose ist und dass (wegen ZR2 = ZR2(ZR1)) ZR2→ZR1 sowieso eine Semiose ist. Von dem ursprünglichen Objekt bleibt also in der Arithmetik genau das übrig, was durch die Semiose in einer der 10 Peirceschen Zeichenklassen repräsentierbar ist. Da die Algebra es demnach mit Semiosen von Semiosen, d.h. mit Meta-Meta-Objektivationen zu tun, während die Arithmetik es mit einfachen Semiosen, d.h. Meta-Objektivationen, zu tun hat, bleibt in der Algebra von einem ursprünglichen Objekt nur das übrigen, was durch die Superisation zweier oder mehrerer Zeichen zu einem neuen Zeichen unangetastet bleibt.

Bibliographie

Toth, Alfred, Kann man mit Zeichen rechnen? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a

Toth, Alfred, Semiotisches Zählen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011b

Toth, Alfred, Eigenrealität als notwendige Bedingung der Mathematik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011c

26.3.2011